Fonction dérivée

Première 6

1 Rappel : fonction dérivée

Définition 1 *Soit f une fonction définie en tous point d'un intervalle I et telle que pour tout $x \in I$, f soit dérivable en x. La fonction*

$$f' : x \mapsto f'(x)$$

s'appelle la fonction dérivée de f.

Motivation générale : Le calcul du nombre dérivé peut parfois s'avérer long et fastidieux. Le but de ce chapitre est de trouver des *formules* permettant de déterminer les nombres dérivés de certaines fonctions usuelles.

2 Les dérivées des fonctions usuelles

On a démontré en exercice que la fonction dérivée d'une fonction affine de la forme : $f(x) = mx + p$ avec $m, p \in \mathbb{R}$, était la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f'(x) =$$

On démontre par des calculs les formule suivantes :

Fonction	Fonction dérivée	Domaine de dérivabilité
$f : x \mapsto k$		$\mathbb{R}$
$f : x \mapsto x$		
$f : x \mapsto mx$		$\mathbb{R}$
$f : x \mapsto mx + p$ $(m, p \in \mathbb{R})$		$\mathbb{R}$
$f : x \mapsto x^n$, n entier strictement positif		
$f : x \mapsto \frac{1}{x}$		
$f : x \mapsto \frac{1}{x^n}$, n entier strictement positif		
$f : x \mapsto \sqrt{x}$, définie sur $[0; +\infty[$		

Exemples : Déterminons les fonctions dérivées des fonctions suivantes, on n'oubliera pas de mentionner le domaine de dérivabilité :

1. f, définie par $f(x) = 3x + 4$.
2. g, définie par $g(x) = 3$.
3. h, définie par $h(x) = x^2$.
4. i, définie par $i(x) = x^3$.
5. j, définie par $j(x) = \frac{1}{x^{37}}$.

Version enseignant

Fonction	Dérivée	Domaine de dérivabilité
$f : x \mapsto k$	$f' : x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$f : x \mapsto x$	$f' : x \mapsto 1$	$\mathbb{R}$
$f : x \mapsto mx$	$f' : x \mapsto m$	$\mathbb{R}$
$f : x \mapsto mx + p$ $(m, p \in \mathbb{R})$	$f' : x \mapsto 1$	$\mathbb{R}$
$f : x \mapsto x^n$, n entier strictement positif	$f' : x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f : x \mapsto \frac{1}{x}$	$f' : x \mapsto \frac{-1}{x^2}$	$]-\infty, 0[\cup]0; +\infty[$
$f : x \mapsto \frac{1}{x^n}$, n entier strictement positif	$f' : x \mapsto \frac{-n}{x^{n+1}}$	$]-\infty, 0[\cup]0; +\infty[$
$f : x \mapsto \sqrt{x}$, définie sur $[0; +\infty[$	$f' : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$

3 Dérivée d'une somme et d'un produit par une constante

3.1 Dérivée d'une somme

Rappel : Soit u et v deux fonctions définies sur un intervalle I, on appelle somme de u et de v la fonction que l'on note $(u+v)$ et qui associe à x, $u(x)+v(x)$.

Proposition 1 *Soit u et v deux fonctions définies sur un même intervalle I alors, pour tout $x \in I$, $(u+v)'(x) = u'(x) + v'(x)$. On peut donc écrire que*

$$(u+v)' = u' + v'.$$

Exemples : Déterminons les fonctions dérivées des fonctions suivantes, on n'oubliera pas de mentionner le domaine de dérivabilité :

1. $u+v$ où, $u(x) = x^2$, $v(x) = 3x+4$.
2. $f+g$ où, $f(x) = x^5$, $g(x) = x^2$.
3. i définie par $i(x) = x^4 + x + 1$
4. j, définie par $j(x) = \sqrt{x} + 2x + 3$.

3.2 Dérivée d'un produit par une constante

Soit k un nombre réel fixé.

Proposition 2 *Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, la dérivée de la fonction $ku : x \mapsto ku(x)$ est la fonction qui à x associe $ku'(x)$. On peut donc écrire :*

$$(ku)' = ku'.$$

Exemple : la fonction dérivée de la fonction $f : x \mapsto 5x^4$ est

Remarque : On peut déduire de la proposition précédente et de celle concernant la somme que si u et v sont dérivables sur I alors :

$$(u-v)' = u' - v'.$$

4 Signe de la dérivée et sens de variation d'une fonction

Proposition 3 *Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I. :*

— *Si $f'(x) \geq 0$ pour tout x de I alors f est croissante sur I.*

— *Si $f'(x) \leq 0$ pour tout x de I alors f est décroissante sur I.*

Cette proposition peut être raffinée et donne le théorème suivant :

Théorème 1 *Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I. :*

— *Si $f'(x) = 0$ sur I alors f est constante sur I.*

— *Si $f'(x) > 0$ pour tout x de I sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de x où f' s'annule, alors f est strictement croissante sur I.*

— *Si $f'(x) < 0$ pour tout x de I sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de x où f' s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.*

Application : Variations de la fonction cube :
Soit $f : x \mapsto x^3$.

Exemple : Imaginons connaître des informations sur le signe de la dérivée d'une fonction, on va pouvoir en déduire des choses sur celui de f.

x	-5		1		8
$f'(x)$	3	$+$	0	$-$	-1

5 Extremums

On appelle extremum d'une fonction sur un intervalle I un éventuel maximum ou minimum de cette fonction.

Définition 2 — *Soit f une fonction définie sur un intervalle I, a un élément de I. On dit que f admet un minimum en a sur I si pour tout $x \in I, f(x) \geq f(a)$.*
— *Soit f une fonction définie sur un intervalle I, a un élément de I. On dit que f admet un maximum en a sur I si pour tout $x \in I, f(x) \leq f(a)$.*

Exemples : a) Sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto x^2$ admet un maximum en 0.
b)

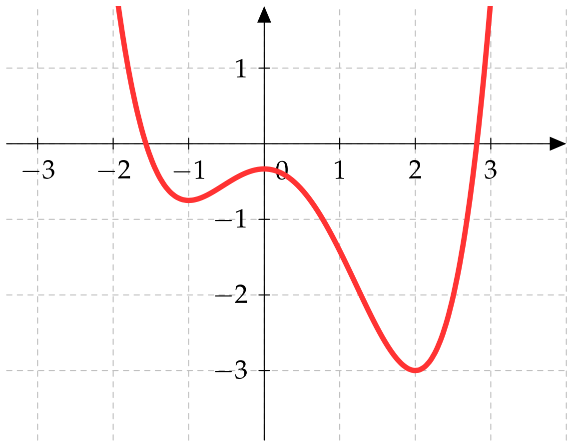

FIGURE 1 – On donne $f(0) = -\frac{1}{3}, f(-1) = -\frac{2}{3}$.

6 Dérivée d'un produit et d'un quotient de fonction

Dans la table qui suit, les fonctions u et v sont supposées définies et dérivables sur un même intervalle I. On note $\mathcal{Z}$ l'ensemble des x tels que $v(x) = 0$.

Forme de la fonction	Fonction dérivée	Domaine de dérivabilité
$x \mapsto u(x) + v(x)$		
$x \mapsto ku(x)$ (k constante)		
$x \mapsto u(x)v(x)$		
$x \mapsto \dfrac{1}{u(x)}$		
$x \mapsto \dfrac{u(x)}{v(x)}$		

Exemples :
Déterminer les expressions des fonctions dérivées par les expressions suivantes :

1. $f(x) = (3x + 4)(x + 1)$.
2. $g(x) = \sqrt{x}(x^2 + 1)$.
3. $h(x) = \dfrac{1}{3x + 1}$.
4. $i(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 + 3}$.

Version enseignant

Forme de la fonction	Dérivée	Domaine de dérivabilité
$x \mapsto u(x) + v(x)$	$x \mapsto u'(x) + v'(x)$	I
ku (k constante)	ku'	I
$x \mapsto u(x)v(x)$	$x \mapsto u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$	I
$x \mapsto \dfrac{1}{u(x)}$	$x \mapsto \dfrac{-1}{u(x)^2}$	I
$x \mapsto \dfrac{u(x)}{v(x)}$	$x \mapsto \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$	$I \setminus \mathcal{Z}$