

Probabilités et algorithmique

Première 6

Simulation d'un jeu

On considère le lancer d'un dé à six faces équilibré. Le joueur mise 1 euro. Si le dé donne 1, 2, 4, 6 il perd sa mise. Si le dé donne 3, il récupère sa mise et gagne en plus 5 euros, s'il sort un 5 il récupère sa mise.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire correspondant au gain d'un seul lancer ?
2. Quelle est l'espérance de la loi ? Le jeu est-il équitable, favorable au joueur, défavorable ?

Cas d'une répétition de 10 tirages

Dans cette partie le joueur choisit de jouer dix fois consécutivement au jeu. On appelle X la fortune du joueur. On suppose qu'il commence avec un capital de 10 euros. Comme on s'en rend compte, essayer de faire un arbre pour lister les issues puis identifier les gains possibles est long. On va plutôt chercher à **simuler** l'expérience aléatoire. On propose l'algorithme suivant :

Déclarer les variables X, H

Initialiser $X = 10$

Pour i de 1 à 10 **faire**

H prend la valeur
 "nombre-au-hasard" entre 1 et 6
 Si ($H = 1$ ou $H = 2$ ou $H = 4$ ou
 $H = 6$)
 X prend la valeur $X - 1$
 Si ($H = 3$)
 X prend la valeur $X + 5$
 Si ($H = 5$)
 X ne change pas.

fin

Afficher X

1. Le joueur peut-il finir ruiné (c'est à dire avoir 0 euros ou éventuellement moins) au bout de 5 répétitions du jeu ? de 10 répétitions du jeu ? Si oui avec quelle probabilité ?
2. Quelles sont les valeurs possibles pour la variable H ?
3. Concrètement à quelle quantité liée au jeu la variable H correspond-elle ?
4. Que représente la variable X ?
5. Dans la boucle pour, que devient la variable X lorsque $H = 1$? $H = 3$? $H = 4$?

Le cas de N tirages

On ne souhaite plus jouer 10 fois mais un nombre indéterminé de fois que l'on va noter N .

1. Quelle somme doit au moins valoir la fortune initiale du joueur pour que le joueur soit toujours en mesure de jouer ?
2. Sur votre cahier, proposez une modification de l'algorithme précédent pour qu'il simule non pas 10 tirages mais N .

Le cas général

Désormais, nous nous intéressons à un joueur compulsif qui va jouer tant qu'il lui reste de l'argent. Notre joueur arrive avec une fortune de F euros. A la place d'une boucle "Pour" nous allons utiliser une boucle "Tant que", qui va vérifier à chaque étape que le joueur n'est pas ruiné. Compléter l'algorithme ci-dessous :

saisir F

Déclarer les variables X, H

Initialiser $X =$

Tant que

faire

H prend la valeur "nombre-au-hasard" entre 1 et 6

 Si

X prend la valeur $X - 1$

 Si ($H = 3$)

X prend la valeur $X + 5$

 Si ($H = 5$)

X ne change pas.

fin

Afficher X

1. Est il possible que la procédure ci-dessus ne s'arrête jamais ?
2. Ajouter à l'algorithme une variable C , qui compte le nombre de répétition du jeu. Une telle variable s'appelle une "variable de comptage".
3. Proposer une variante de l'algorithme permettant de simuler le joueur suivant : le joueur s'arrête soit lorsqu'il est ruiné soit, s'il n'est pas ruiné à ce moment, au bout de 100 parties.