Positions relatives de courbes et de tangentes

Seconde 11

Ce TP s'effectue à l'aide de Geogebra (disponible sur les ordinateurs dans Progs/ro). Il cherche à étudier les positions relatives d'une courbe et de ses tangentes.

1 Etude d'un polynôme de degré 2

1.1 Partie pratique

1. Dans la barre de saisie de geogebra, taper l'expression de la fonction suivante :

$$f(x) = x^2 - 4x + 1.$$

2. Graphiquement, déterminer les coordonnées du sommet de la parabole.
3. Bonus (à faire à la fin) : en déduire l'expression de la forme canonique de la fonction polynôme du second degré.
4. Sur votre feuille, rappeler l'expression de la fonction dérivée $f'(x)$. Représenter graphiquement avec Geogebra (sur le même graphique) cette fonction dérivée.
5. A l'aide de l'outil "tangente" de geogebra (afficher le menu proposé par le quatrième bouton en partant de la gauche, celui représentant par défaut des droites perpendiculaires), tracer la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 3. Afficher cette tangente en rouge.
6. En cliquant avec le bouton droit sur l'équation de la droite, afficher l'équation sous la forme $y = ax + b$. Vous devez obtenir $y = 2x - 8$.
7. Conjecturez le nombre de points d'intersection de la courbe de f avec la tangente que vous avez tracé. Est-ce que la tangente semble a) être toujours en dessous de la courbe, b) toujours au dessus ou c) ni l'un ni l'autre, cela dépend des endroits ?

1.2 Partie théorique

Dans cette partie on va étudier l'écart entre les valeurs prises par la fonction et l'ordonnée de sa tangente. Dans la partie précédente on a vu que f semblait toujours au dessus de sa tangente [1].

1. Sur le graphique que vous avez réalisé avec Geogebra, à quoi correspond la différence $f(x) - (2x - 8)$?
2. A l'aide d'une identité remarquable, factoriser la différence $f(x) - (2x - 8)$.
3. Étudier le signe de $f(x) - (2x - 8)$.
4. Conclure.

1. En Terminale, vous verrez que cette propriété lorsqu'elle est vraie en tout x est appelée la **convexité**

2 Étude d'une fonction homographique

Dans cette partie on notera $I =]0; +\infty[$

1. Dans une nouvelle fenêtre Geogebra, tracer la fonction définie pour tout x de I par $g(x) = \frac{1}{x} + x$.
2. Placer un point sur la courbe. Afficher la tangente à la courbe de g en ce point.
3. La courbe représentative de g vous semble-t-elle toujours au-dessus de la tangente à la courbe ?
4. Par le calcul, démontrer que quel que soit x de I, $g'(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$. Dresser le tableau de signe de g' et en déduire les variations de g.
5. A l'aide de Geogebra, conjecturer les variations de g'.