Nom :

Corrigé du devoir surveillé : Probabilités

1 Loterie (4 points)

Pour une loterie, on vend 1000 billets à 1 euro l'unité. Un des billets rapporte un lot à 400 euros, deux autres des lots à 100 euros et dix rapportent des lots 10 euros. Un joueur achète un billet de cette loterie. On note X son gain (la différence entre la valeur du lot obtenue et le prix qu'il a payé).

1.

X	-1	9	99	399
Proba	$\frac{987}{1000}$	$\frac{10}{1000}$	$\frac{2}{1000}$	$\frac{1}{1000}$

2. $E(X) = \frac{987}{1000} \times (-1) + \frac{10}{1000} \times 9 + \frac{2}{1000} \times 99 + \frac{1}{1000} \times 399 = \frac{-3}{10}$.
3. L'espérance du gain est négative, donc le jeu est défavorable au joueur.
4. Soit x le prix du nouveau lot, l'espérance de la loterie est donc :

$$E(X) = \frac{987}{1000} \times (-1) + \frac{10}{1000} \times 9 + \frac{2}{1000} \times 99 + \frac{1}{1000} \times x = \frac{-699}{1000} + \frac{x}{1000}.$$

On cherche alors x tel que

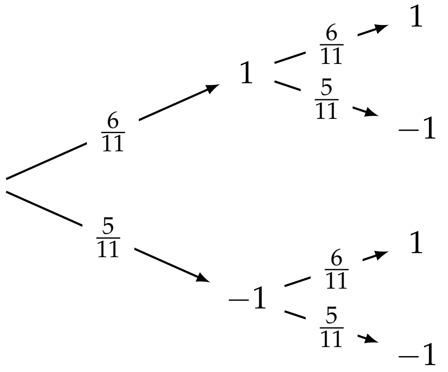
$$\frac{-699}{1000} + \frac{x}{1000} = 0.$$

On trouve alors $x = 699$ ce qui correspond à un lot d'une valeur de 700 euros.

2 Tirages répétés (5 points)

On considère une urne contenant 11 jetons, 6 sur lequel est inscrit le nombre 1 et 5 sur lequel est inscrit le nombre -1.

On effectue deux tirages **avec** remise.



1.

2.

X	-2	0	2
Proba	$\frac{15}{111}$	$\frac{60}{111}$	$\frac{36}{111}$

L'espérance vaut alors $E(X) = -2 \times \frac{15}{111} + 2 \times \frac{36}{111} = \frac{-30}{111} + \frac{72}{111} = \frac{42}{111}$.

3.

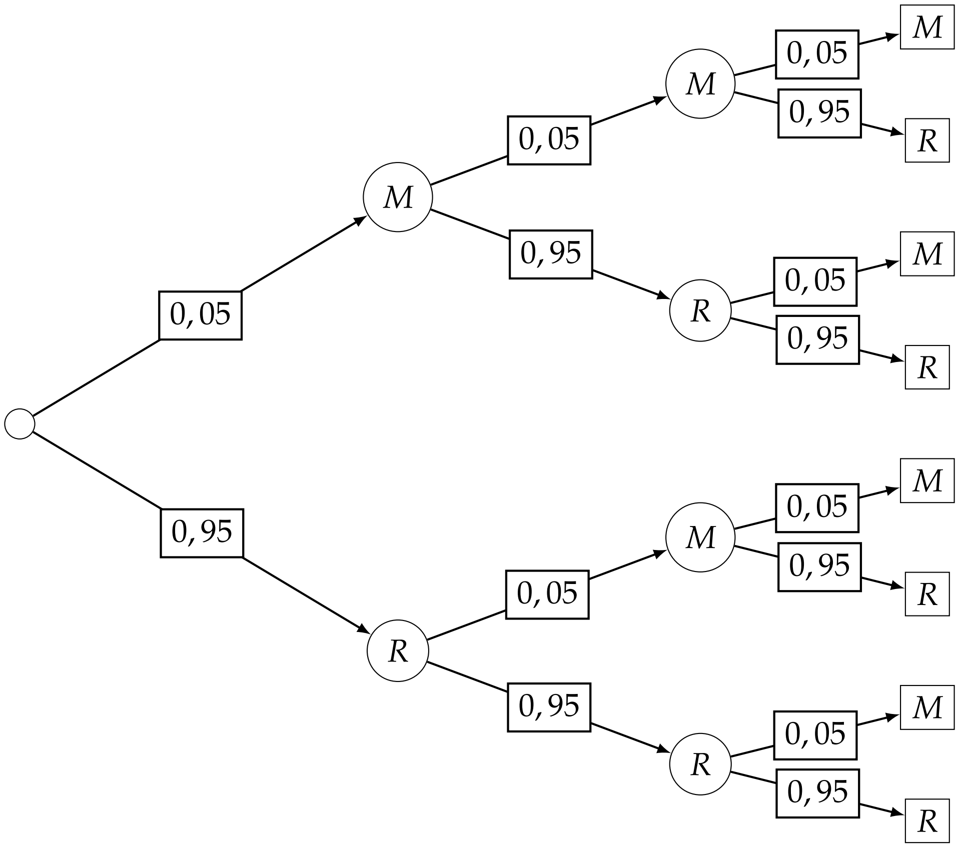
Y	-1	1
Proba	$\frac{51}{111}$	$\frac{60}{111}$

L'espérance vaut alors $E(X) = -1 \times \frac{51}{111} + 1 \times \frac{60}{111} = \frac{9}{111}$.

3 Dans le mille (5 points)

Au biathlon, l'athlète doit, après une phase de ski de fond, tirer dans une cible à cinq reprises. Chaque tir peut être soit "réussi" (ce que l'on note R) ou manqué (ce que l'on note M). On considère que notre athlète, appelons le Martin, a une probabilité de réussir son tir de $0,95$.

1. R est l'événement contraire de M donc $P(R) = 1 - P(M) = 0,05$.



2.
3. On a $P(RRR) = (0,95)^3, P(MMM) = (0,05)^3$.
4. A partir de l'arbre de probabilité, on dresse le tableau de la loi de X :

X	0	1	2	3
Proba	$\frac{1}{8000}$	$\frac{57}{1000}$	$\frac{1083}{1000}$	$\frac{6859}{8000}$

5. On trouve $E(X) \approx 2,85$

4 Le chevalier de Méré (6 points)

Antoine Gombaud, chevalier de Méré (1607-1694) était un penseur, ami de Blaise Pascal avait fait le pari suivant avec ses amis : "Si je lance deux dés à six faces vingt quatre fois, je vais obtenir au moins une fois un double-six". Après avoir fait ce pari avec de nombreuses personnes, le chevalier avait perdu plus souvent qu'il n'avait gagné. Essayons d'expliquer pourquoi.

1. Voir tableau dans le cours. 36 issues sont équiprobables, une seule correspond à un double six.
2. $p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$.
3. L'événement contraire $\overline{B}$ est "on n'obtient aucun double-six au cours des vingt quatre lancers".
4. La probabilité "on n'obtient pas de double six en 24 lancers" est de $(\frac{35}{36})^2 4 \approx 0,51$.
5. Ainsi la probabilité de l'événement "Obtenir au moins un double six en 24 lancers" est de $1 - \frac{35}{36})^2 4 \approx 0,49$.
6. La probabilité de gagner du chevalier était plus petite que un demi. En vertu de ce que nous avions appelé en TP, la "loi des grands nombres", en répétant un grand nombre de fois il gagnera dans environ 49% des cas et perdra dans 51%.