Correction du devoir surveillé : fonction dérivée et optimisation

Première 6

1 Dérivées usuelles : ($\approx$ 5 points)

Calculer les fonctions dérivées des fonctions définies par les expressions suivantes, préciser à chaque fois le domaine de dérivabilité :

1. (a) $f'(x) = \sqrt{x}.Der =]0;+\infty[$.
   (b) $g'(x) = 3.Der = \mathbb{R}$.
   (c) $h'(x) = 12x^3 - 6x^2 - \frac{1}{x^2}.Der = \mathbb{R}^*$.
   (d) $i'(x) = \frac{20}{x^5}.Der = \mathbb{R}^*$
2. $k(x) = x^8 + 12320$ convient.

2 Exercice 1 : signe d'une fonction polynôme du second degré ($\approx$ 7 points)

On considère la fonction polynôme du second degré suivante définie par l'expression suivante :

$$f(t) = -100t - t^2 + 2000.$$

Dans cet exercice on veut démontrer quel est le tableau de signe de cette fonction **sans utiliser le résultat vu dans le cours sur le second degré**.

A) Zéros

1. $a = -1; b = -100; c = 2000$.
2. $\Delta = b^2 - 4ac = 100^2 - 4 \times (-1) \times 2000 = 18000$.
3. On en déduit $x_+ = \frac{-(-100)+\sqrt{18000}}{2\times(-1)} = \frac{-100-\sqrt{18000}}{2} \approx 234$.
   Et $x_- = \frac{-100+\sqrt{18000}}{2} \approx 17$.

B) Variations

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables.
2. $f'(t) = -100 - 2t$.
3. On résout $f'(t) = 0$ On trouve $t = -50$. D'où le signe et les variations de f :

x	$-\infty$		-50		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

C) Signe

Au vu des variations de f, et comme $\frac{(-\sqrt{18000}-100)}{2} < -50$ et comme $\frac{(\sqrt{18000}-100)}{2} > -50$ on en déduit que :

t	$-\infty$		$\frac{(-\sqrt{18000}-100)}{2}$		$\frac{(\sqrt{18000}-100)}{2}$		$+\infty$
$f(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3 Problème : maximiser le bénéfice ($\approx$ 9 points)

On s'intéresse au résultat net d'une entreprise qui détient le monopole de la fabrication et de la vente d'un objet.

3.1 Modélisation

Comme l'entreprise est seule sur le marché, elle peut fixer le prix en fonction de la demande. Pour des raisons industrielles, il n'est pas possible de produire plus de 40 objets par jour.

Soit q la quantité d'objets produits (q varie entre 0 et 40) et p le prix de l'objet. La fonction demande est donnée par la relation :

$$q = 40 - 0,02p.$$

1. On inverse la relation pour obtenir $p = \frac{q-40}{-0,02} = -50q + 2000$.
2. $R(q) = q \times p = q \times (-50q + 2000) = -50q^2 + 2000q$.
3. $R'(q) = -100q + 2000$.

3.2 Optimisation

On considère désormais que le coût de fabrication de q objets est donné par : $C(q) = \frac{1}{3}q^3 + 620$.

1. $C(0)$ est le coût de production de 0 objets. En économie, ce coût s'appelle le coût fixe.
2. $C'(q) = q^2$.
3. $f(q) = R(q) - C(q) = -50q^2 + 2000q - \frac{1}{3}q^3 - 620$
4. En combinant les réponses des questions 3.1.3 et 3.2.1 $f'(q) = -100q - q^2 + 2000$.
5. On reprend le tableau de signe de l'exercice qui précède :

t	$-\infty$		$\frac{(-\sqrt{18000}-100)}{2}$		$\frac{(\sqrt{18000}-100)}{2}$		$+\infty$
$f(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

6. On en déduit le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$\frac{(-\sqrt{18000}-100)}{2}$		$\frac{(\sqrt{18000}-100)}{2}$		
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

7. Oui, d'après le tableau de variation le résultat net est maximal pour une quantité de $\frac{(\sqrt{18000}-100)}{2} \approx 17,1$. Donc la quantité optimale est soit 17 soit 18. une vérification à la calculatrice nous assure que le résultat net est maximal pour 17 objets produits.