DS : nombre dérivé

Première 6

1 Lecture graphique

On donne la représentation graphique d'une fonction ci-dessous.

1. Graphiquement, on détermine les coefficients directeurs des tangentes :
   (a) 0.
   (b) $\frac{4}{3}$.
   (c) -6.
   (d) 0.
   (e) $\frac{-3}{4}$.
2. En -2 : $y = -6(x+2) + 0,5$. En 2 : $y = \frac{1}{2}$.
3. $y = \frac{-1}{3}(x-7) - 2,5$.

2 Calcul de nombres dérivés

1. Soit $h \neq 0$. On commence par calculer le taux d'accroissement de f entre 3 et $3+h$. On a $f(3) = 10$, $f(3+h) = 2(3+h)^2 - 3(3+h) + 1 = 2(9+6h+h^2) - 9 - 3h + 1 = 18 + 12h + 2h^2 - 9 - 3h + 1 = 10 + 9h + 2h^2$.
   Donc
   $$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{2h^2 + 9h + 10 - 10}{h} = 2h + 9.$$
   Quand h se rapproche de 0, le taux d'accroissement se rapproche donc de 9 donc $f'(3) = 9$.
2. Soit f définie sur $]3;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x-3}$. Calculer $f'(5)$.
   Soit $h \neq 0$ tel que $5+h \in]3;+\infty$. On commence par calculer le taux d'accroissement de f entre 5 et $5+h$. On a
   $f(5) = \frac{1}{2}$. Donc :
   $$\frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \frac{\frac{1}{5+h-3} - \frac{1}{2}}{h} = \frac{\frac{2}{2(2+h)} - \frac{2+h}{2(2+h)}}{h} = \frac{\frac{-h}{4+2h}}{h} = \frac{-1}{4+2h}.$$
   Quand h se rapproche de 0, le taux d'accroissement se rapproche donc de $\frac{-1}{4}$ donc $f'(5) = \frac{-1}{4}$.

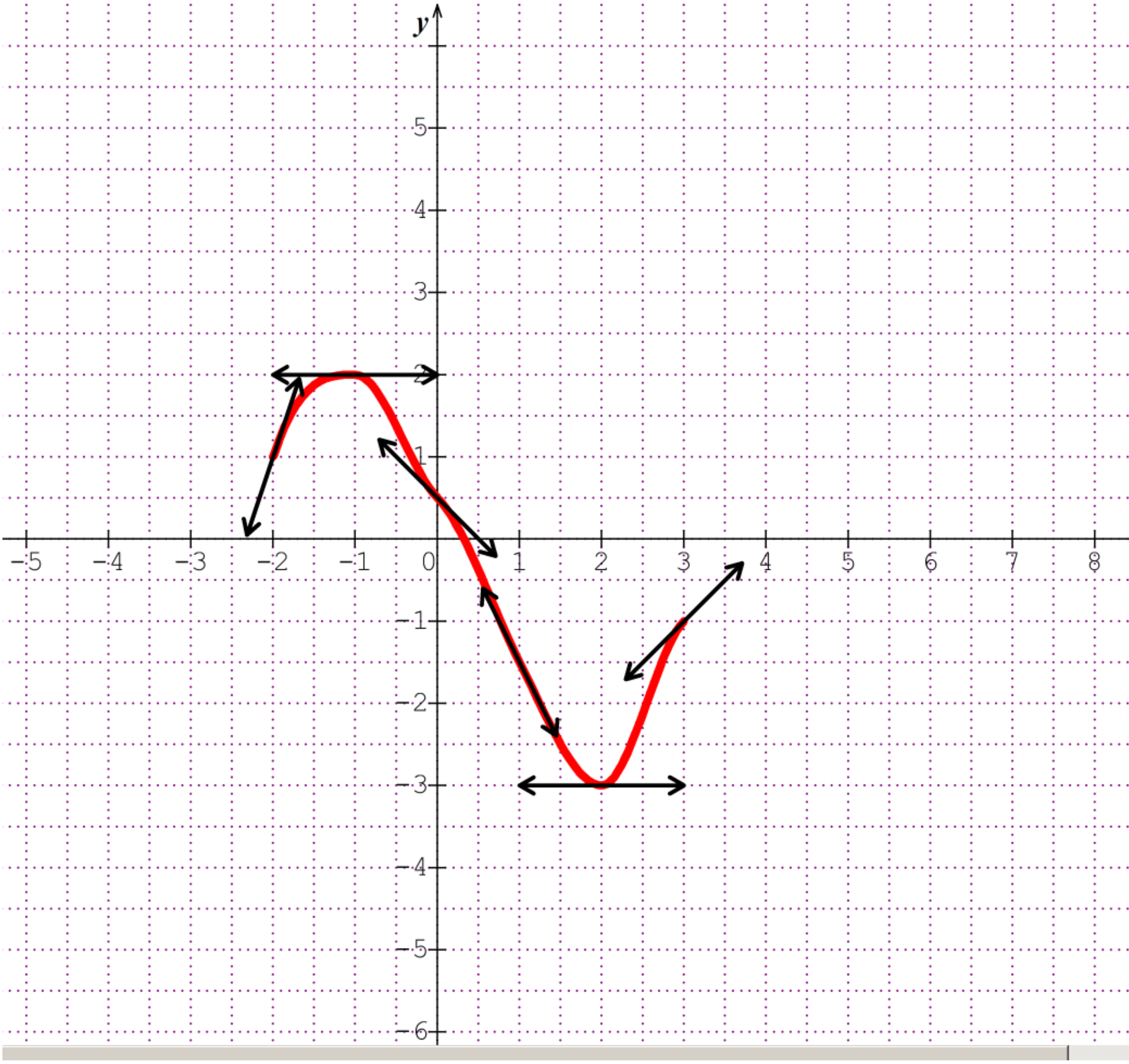
3 Tracer une courbe connaissant ses tangentes

On donne les renseignements suivants sur la fonction f.

x	-2		-1		2		3
f	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-1

x	-2	0	1
$f(x)$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{-3}{2}$
$f'(x)$	3	-1	-2

On sait de plus que les tangentes à la courbe de f au point d'abscisse -1 et au point d'abscisse 2 sont horizontales.

1. Les tangentes aux points d'abscisse -1 et 2 sont horizontales. Elles ont donc un coefficient directeur nul. Ainsi $f'(-1) = 0$ et $f'(2) = 0$.
2. 

4 Un problème

Soit C une fonction représentant le coût de produire un certain nombre d'objets. En économie, on appelle coût marginal au rang q, le taux d'accroissement suivant :

$$C_m(q) = \frac{C(q+1) - C(q)}{1} = C(q+1) - C(q).$$

Dans la suite on considérera la fonction de coût suivante :

$$C(q) = 0,003q^2 + 60q + 1800.$$

1. $C_m(500) = C(501) - C(500) = 32613,003 - 32550 = 63.003$.
2. $C_m(q) = C(q+1) - C(q) = (0,003(q+1)^2 + 60(q+1) + 1800) - (0,003q^2 + 60q + 1800) = 0,003((q+1)^2 - q^2) + 60(q+1-q) + 1800 - 1800 = 0,003(q^2 + 2q + 1 - q^2) + 60 = 0,006q + 60$.