Devoir surveillé : fonction dérivée et optimisation

Première 6

1 Dérivées usuelles : ($\approx$ 5 points)

Calculer les fonctions dérivées des fonctions définies par les expressions suivantes, préciser à chaque fois le domaine de dérivabilité :

1. (a) $f(x) = \sqrt{x}$.
   (b) $g(x) = \sqrt{3}x + 4$.
   (c) $h(x) = 3x^4 - 2x^3 + \frac{1}{x}$.
   (d) $i(x) = \frac{-5}{x^4}$.
2. Donner une fonction dont la dérivée est $j(x) = 8x^7$.

2 Exercice 1 : signe d'une fonction polynôme du second degré ($\approx$ 5+1 points)

On considère la fonction polynôme du second degré suivante définie par l'expression suivante :

$$f(t) = -100t - t^2 + 2000.$$

Dans cet exercice on veut démontrer quel est le tableau de signe de cette fonction **sans utiliser le résultat vu dans le cours sur le second degré**.

A) Zéros

1. Calculer le discriminant Δ de ce polynôme du second degré.
2. En déduire les éventuelles valeurs pour lesquelles f s'annule.

B) Variations

1. Quel est le domaine de dérivabilité de f ?
2. Calculer l'expression de $f'(t)$ sur ce domaine.
3. Déterminer le tableau de variation de f.

C) Signe

1. (Bonus) En combinant les résultats des deux parties précédentes, montrer que le tableau de signe de f est donné par :

t	$-\infty$		$\frac{(-\sqrt{18000}-100)}{2}$		$\frac{(\sqrt{18000}-100)}{2}$		$+\infty$
$f(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3 Problème : maximiser le bénéfice ($\approx$ 10 points)

Vocabulaire : Le coût de fabrication de x objets définit une fonction notée généralement $C(x)$. La recette de la vente de ces mêmes x objets se note souvent $R(x)$. La différence $R(x) - C(x)$ s'appelle le **résultat net.** Un résultat net positif s'appelle un **bénéfice** et un résultat net négatif un **déficit**.

On s'intéresse au résultat net d'une entreprise qui détient le monopole de la fabrication et de la vente d'un objet.

3.1 Modélisation

Comme l'entreprise est seule sur le marché, elle peut fixer le prix en fonction de la demande. Pour des raisons industrielles, il n'est pas possible de produire plus de 40 objets par jour.

Soit q la quantité d'objets produits (q varie entre 0 et 40) et p le prix de l'objet. La fonction demande est donnée par la relation :

$$q = 40 - 0,02p.$$

1. Exprimer p en fonction de q.
2. Montrer que la recette obtenue pour la vente de q objets au prix p peut s'exprimer comme
$$R(q) = -50q^2 + 2000q.$$
3. On admet que R est dérivable sur $[0;40]$. Calculer $R'(q)$.

3.2 Optimisation

On considère désormais que le coût de fabrication de q objets est donné par : $C(q) = \frac{1}{3}q^3 + 620$.

1. Economiquement, à quoi correspond $C(0)$?
2. On admet que C est dérivable sur $[0;40]$. Calculer $C'(q)$.
3. On appelle $f(q)$ le résultat net. Exprimer le résultat net en fonction de q.
4. Dire pourquoi $f'(q) = R'(q) - C'(q)$. En déduire que $f'(q) = -100q - q^2 + 2000$.
5. Déterminer le signe de $f'(q)$ (Indication : regarder attentivement l'exercice 1...).
6. En déduire les variations de f.
7. Existe-t-il une valeur de q pour laquelle le résultat net est maximal ? Si oui quelle est-elle ? si non pourquoi ?