Exercices à rédiger pour le 20/03

Première 6

1 Exercice 1 : démonstration de l'expression d'une fonction dérivée

On considère $f : x \mapsto x^2$.

Le but est de démontrer l'expression de f' dans le cours. Il est donc **interdit de s'en servir durant l'exercice.**

1. — $f(2) = 4$.
   — Soit $h \neq 0$, $\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{(2+h)^2-4}{h} = \frac{4+h^2+4h-4}{h} = \frac{h^2+4h}{h} = \frac{h(h+4)}{h} = h+4$.
   — On en déduit $f'(2) = 4$.
2. Soit x un nombre réel quelconque.
   — $f(x) = x^2$.
   — Soit $h \neq 0$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \frac{x^2+h^2+2xh-x^2}{h} = \frac{h^2+2xh}{h} = \frac{h(h+2x)}{h} = h+2x$.
   — En faisant $h = 0$, on obtient $f'(x) = 2x$.

2 Exercice 2 : le retour du marchand de contrebasses

Vocabulaire : Le coût de fabrication de x objets définit une fonction notée généralement $C(x)$. La recette de la vente de ces mêmes x objets se note souvent $R(x)$. La différence $R(x) - C(x)$ s'appelle le **résultat net.** Un résultat net positif s'appelle un **bénéfice** et un résultat net négatif un **déficit**.

Un atelier de lutherie fabrique des contrebasses. Le coût de production mensuel, exprimé en dizaines de milliers d'euros est donné par la fonction C définie sur l'intervalle $[0; 40]$ par :

$$C(x) = 0,001x^3 - 0,03x^2 + 0,3x.$$

On considère que les contrebasses sont vendues 3500 euros la pièce. On a vu dans un précédent DM que la fonction R associée a pour expression $R(x) = 0,35x$.

1. $B(x) = 0,35x - (0,001x^3 - 0,03x^2 + 0,3x) = -0,001x^3 + 0,03x^2 + 0,05x$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, B est dérivable en ce point comme somme de fonctions dérivables, on calcule $B'(x) = -3 \times 0,001x^2 + 2 \times 0,03x + 0,05 = -0,003x^2 + 0,06x - 0,05$.
3. Pour étudier les variations de B, on étudie le signe de sa dérivée B'. On calcule le discriminant :

   $$\Delta = b^2 - 4ac = 0,06^2 - 4 \times (-0,003) \times 0,05 = 0,0042 > 0.$$

   On en déduit les deux racines :

   $$x_+ = \frac{-0,06 + \sqrt{0,0042}}{-0,006} \approx -1, x_- = \frac{-0,06 + \sqrt{0,0042}}{-0,006} \approx 20,8.$$

   On en déduit le tableau suivant sur $[0; 40]$:

x	0		x_-		40
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
B		$\nearrow$		$\searrow$	

4. D'après le tableau, le nombre de contrebasse donnant le meilleur résultat net est soit le nombre entier immédiatement inférieur à x_- soit celui qui est supérieur donc soit 20, soit 21. La calculatrice permet de départager les candidats, le bénéfice est maximal pour 21 contrebasses vendues.